1/4/21

Την προηγούμενη εβδομάδα είδαμε ότι η $f: D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη (δηλ. μιγαδικά διαφ/μη) στο $z_0 \in \mathbb{C}$: $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}: \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$ [και τότε το $\lambda =: f'(z_0)$ είναι μοναδικό]

[$f'(z_0) \in \mathbb{C}$ είναι η $\mathbb{C}$-παράγωγος και ορίζει μια $\mathbb{C}$-γραμμική απεικόνιση $z \mapsto f'(z_0) z$, το ($\mathbb{C}$-ή μιγαδικό) διαφορικό της f στο z] [οι $\mathbb{C}$-γραμμικές συναρτήσεις είναι (όλες) οι $z \mapsto \lambda z$ για $\lambda \in \mathbb{C}$]

Επίσης

για το αντίστοιχο διανυσμ. πεδίο $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}: D \to \mathbb{R}^2$ με

$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ το ότι f είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη στο $z_0 = x_0 + i y_0$ σημαίνει ότι:

a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ είναι διαφ/μο στο (x_0, y_0) [δηλ. $\exists$

$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$] και

b) ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ $\quad$ $v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)$

Ακόμα είδαμε ότι σε γραμμικό διανυσμ. πεδίο στον $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ αντιστοιχούν (1-1 και επί)

μιγ. συναρτήσεις $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$,

$\lambda := \dfrac{a-ib}{2}$, $\mu := \dfrac{a+ib}{2}$, $a := \alpha + i\gamma$, $b = \beta + i\delta$

τις οποίες ονομάζουμε $\mathbb{R}$-γραμμικές [είναι $\mathbb{C}$-γραμμικές ανν $\mu = 0$]

Παρατήρηση: Οι $\mathbb{C}$-γραμμικές συναρτήσεις είναι -προφανώς- $\mathbb{C}$-διαφορίσιμες: $z \longmapsto \underbrace{\lambda z}_{=f(z)}$ με $f'(z) = \lambda \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

αφού $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\lambda z - \lambda z_0 - \lambda(z-z_0)}{z-z_0} = 0$

Ενώ οι $\mathbb{R}$-γραμμικές $z \longmapsto \lambda z + \mu \bar{z}$. $g(z)$ δεν είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μες, αφού $(*)$ $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z)-g(z_0)+\tilde{\lambda}(z-z_0)}{z-z_0} =$

$(*)$ $\forall \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\lambda(z-z_0)+\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)-\tilde{\lambda}(z-z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \lambda - \tilde{\lambda} + \mu \lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} \;\; \nexists$$

[και βλέπουμε ότι μόνο οι $\mathbb{C}$-γραμμικές $\subset \mathbb{R}$-γραμμικές είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μες]

Αφού είδαμε ότι $\exists$ διανυσματικά πεδία $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία είναι διαφορίσιμα, ενώ η αντίστοιχη μιγαδική συνάρτηση $f = u + iv$ δεν είναι $\mathbb{C}$-διαφ, τίθεται το ερώτημα: τι μπορούμε να πούμε για τέτοιες μιγαδικές συναρτήσεις:

Έστω $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ διαφ. στο $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \exists!\, A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left[=: D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) \right] \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x_0,y_0) - A\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$$

$\overset{f=u+iv}{\Longleftrightarrow} \exists!\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}: \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)-\mu(\bar{z}-\bar{z_0})}{z-z_0} = 0 \in \mathbb{C}$

με $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$

Τότε θα λέμε ότι η f είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$ με $\mathbb{R}$-παράγωγο στο z_0 το $\mathbb{R}$-γραμμικό διαφορικό $df_{z_0}: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$ [ΑΠΕΒ: $df_{z_0} = Df(z_0)$]

Τέλος: (1) Δύο ειδών γραμμικότητες μιγαδικών συναρτήσεων [$\mathbb{C}$ = μονοδιάστατος διαν. χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ και ταυτόχρονα $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ - διδιάστατος διαν. χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$]

$\mathbb{C}$-ή μιγαδική γραμμικότητα: $z \mapsto f(z) = \lambda z,\ \lambda\in\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$-ή πραγματική — " — : $z \mapsto f(z) = \lambda z + \mu\bar{z},\ \lambda,\mu\in\mathbb{C}$

(2) Δύο ειδών διαφορισιμότητες μιγαδικών συναρτήσεων

$\mathbb{C}$-ή μιγαδική διαφ: $\exists!\ \lambda = f'(z_0)\in\mathbb{C}$ [η $\mathbb{C}$-παράγωγος της f στο z_0]:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0} = 0 \ \left[\overset{f=u+iv}{\Longleftrightarrow} D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\right]$$

$\mathbb{R}$-ή πραγματική διαφ: $\exists!\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$
[$df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$ το $\mathbb{R}$-διαφορικό της f στο z_0]

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)-\mu(\bar{z}-\bar{z})}{z-z_0} = 0$$

Scanned with CamScanner

$\left[\overset{f=u+iv}{\Longleftrightarrow} D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right.$ με $\lambda = \dfrac{a - ib}{2}$,

$\left. \mu = \dfrac{a+ib}{2} \quad , a = a + i\gamma \quad , b = \beta + i\delta \right]$

Παρατήρηση: $\mu = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+ib}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+i\gamma + i(\beta + i\delta)}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (a-\delta) + i(\gamma+\beta) = 0 \Leftrightarrow (a-\delta, \gamma+\beta) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \delta =: \lambda_1 \quad , \quad -\beta = \gamma =: \lambda_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$\left[= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

[Επίσης $\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \\ z = x+iy}]{\text{αντιστοιχία}} \lambda z$]

Με τα $\lambda, \mu, a, b \in \mathbb{C}$ και $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ όπως πριν

$df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z} = (a + i\gamma)x + (\beta + i\delta) y$

αν η f είναι $\mathbb{R}$-διαφ. $= \underbrace{(u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))x + (u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0))y}$

$=: f_x(\underbrace{x_0+iy_0}_{=z_0})x + f_y(x_0+iy_0)y$

και ειδικότερα, αν η $\quad [f = u+iv]$

f είναι $\mathbb{C}$-διαφ. [δηλ. $\mathbb{R}$-διαφ. και CR: $u_x = v_y \wedge v_x = -u_y$]

$df_{z_0}(z) = (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))x + (-v_x(x_0,y_0) + iu_x(x_0,y_0))y =$

$= (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))(x+iy) = f_x(z_0)z \overset{(*)}{=} f'(z_0)\cdot z$

(*) $[u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda = f'(z_0)]$

Άρα είδαμε την έννοια μερικών παραγώγων πρώτης τάξης μιας $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, ως:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) := u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$ για $f(\underbrace{x_0+iy_0}_{=z_0}) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$

και αντίστοιχα για $\frac{\partial f}{\partial y}$ [γράφεται και ως $\partial_x f = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ κτλ]

Μπορούμε να μιλάμε και για $f: D \to \mathbb{C}$ με $f \in C^k(D)$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^k(D, \mathbb{R}^2)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$ και $f \in C^\infty(D) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^\infty(D, \mathbb{R}^2)$

Σημαντική παρατήρηση: Όπως θα δούμε αργότερα αν μια $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, είναι ολόμορφη [δηλ. f $\mathbb{R}$-διαφ. και ισχύουν οι εξισ. CR στο D] τότε $f \in C^\infty(D)$ και συνεπώς ισχύει το θεώρημα του Schwarz και έχουμε: $u_x + i v_x = v_y - i u_y \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{xy} + i v_{xy} = v_{yy} - i u_{yy} \wedge u_{xx} + i v_{xx} = v_{yx} - i u_{yx}$

$\Leftrightarrow i u_{xx} - v_{xx} = i v_{yx} + u_{yx}$

$\Rightarrow \quad u_{xx} = -u_{yy} \wedge v_{xx} = -v_{yy}$

$u, v \in C^2(D) \Leftrightarrow f \in C^2(D)$

$\Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} =: \Delta u = 0 \wedge v_{xx} + v_{yy} : \Delta v = 0$ δηλ. οι u και v είναι **αρμονικές** συναρτήσεις

Scanned with CamScanner